1193 連續函數環ニツイテ

吉澤尚明（阪大学生）

（9月25日受付）

以下ニ、極ク簡單ナコトデアリマスガ、連續函數ノ擴張ニ關スル一ツノ問題ニ就イテ報告致シマス、尚、コレハ、目下角谷靜夫先生ニ指導シテ頂イテ居リマス セミナリー ニ於テ証明シタコトデアリマスガ、本文ニ關シマシテモ、種々御指導ヲ受ケマシタ。

1. Ω ヲ *bicompact Hausdorff space* トスル時、Ω デ定義サレタ複素数値連續函数 $x(\omega)$ ノ全体ハ、*norm* ヲ $\|x\| = \max_{\omega\in\Omega} |x(\omega)|$ ト定義スルコトニヨリ、ノルム環ヲ作ル。コレヲ $C(\Omega)$ デ表ハス。今、F ヲ Ω ノ閉集合トスル時、F ノ上デ連續ナ函数ハ、*Urysohn* ノ擴張定理ニヨツテ、Ω ノ上ヘ連續ニ擴張スルコトガ出來ル。即チ、$x_F \in C(F)$ ニ対シテ、F ノ上デ $x_F(\omega) \equiv x_\Omega(\omega)$ トナル如キ $x_\Omega \in C(\Omega)$ ガ存在スル。（勿論、$C(F)$ ハ F ノ上ノ複素数値連續函数全体ノ作ルノルム環デアル。$\|x\| = \max_{\omega\in F} |x(\omega)|$ ト定義スル） 此ノ場合、F ガ Ω ノ眞部分集合ナラバ、一ツノ $x_F(\omega)$ ノ擴張 $x_\Omega(\omega)$ ハ唯一ツデハナイガ、任意ニ一ツヲ選ブコトニヨツテ $C(F)$ カラ $C(\Omega)$ ノ中ヘノ一意写像 φ ガ定義サレル。此ノ φ トシテ、*linear, multiplicative* 且 *isometric* ナルモノ

ガ存在スルタメニハ、Fガ（Borsuk ノ意味デ）Ω ノ retract デアル．即チ、スベテノ $\omega\in\Omega$ ニ対シテ $f(\omega)\in F$、$\omega\in F$ ナラバ $f(\omega)=\omega$ ナル、Ω カラ F ノ上ヘノ連続写像 f ガ存在スル）コトガ必要且充分デアルコトヲ証明スルノガ、本文ノ目的デアル。 ココニ任意ノ $x, y\in C(F)$ ニ対シテ、

(1) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$,

且 任意ノ複素数 α ニ対シテ、

$$\varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x)$$

ナル時、φ ヲ linear,

(2) $\varphi(xy)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$

ナル時、φ ヲ multiplicative,

(3) $\|\varphi(x)-\varphi(y)\|_{\Omega}=\|x-y\|_{F}$

ナル時、φ ヲ isometric ト言フ。

2．定理1ヲ補助定理トシテ用ヰル。

定理 1（Šilov）. R ヲ $C(\Omega)$ ノ、単位元ヲ含ム closed subring デ次ノ条件ヲ満スモノトスル．

(*) 任意ノ $x(\omega)\in R$ ニ対シテ $\overline{x(\omega)}$ ガ R ニ属スル。但シ $\overline{x(\omega)}$ ハ $x(\omega)$ ノ共軛複素数ヲ示ス。然ラバ、R ハ Ω ノ或連続像 Ω' ニ関スル $C(\Omega')$ ト equivalent デアル。（isomorphic 且 isometric ヲ equivalent ト言フコトニスル。）

逆ニ、Ω' ガ Ω ノ連続像ナラバ、$C(\Omega')$ ハ、条件 (*) ヲ満ス、$C(\Omega)$ ノ或ル closed subring R ト equivalent デアル。

証明ノ要点 ハ、Rノ一ツノ maximal ideal ニハ Ω ノ一点ガ又 Ω ノ一点ニハ、Rノ maximal ideal ガ夫々唯一ツ対應スルコトカラ、Rノ maximal ideal ノ全体ニ weak topology ヲ入レタモノ Ω' ガ、Ω ノ連続像ニナルコトデアル。シカラバ、Rハ $C(\Omega')$ ト equivalent ニアル。定理ノ后半ハ明ラカデアル。

$\boxed{\text{定理}}$ 2 Ω, Ω' ヲ bicompact Hausdorff spaces トスル。$C(\Omega')$ ト equivalent ナル、$C(\Omega)$ ノ部分環 R (R ガ $C(\Omega)$ ノ単位元ヲ含ムコトハ仮定シナイ) ガ存在スルタメノ必要且充分ナル條件ハ、Ω' ガ Ω ノ連続像デアルコトデアル。

証明。 充分ナルコトハ、定理1ノ后半ソノモノデアルカラ、必要ナルコトヲ証明スル。

(1') $C(\Omega')$ ノ単位元 e' ニ対應スル R ノ元 $e(\omega)$ ハ、$e'^2=e'$ ナルコトカラ、Ω ノ上デ 1 又ハ 0 ナル値ノミヲトル。今、

$\Omega_1=\{\omega \mid e(\omega)=1,\ \omega\in\Omega\}$, $\Omega_2=\{\omega \mid e(\omega)=0,\ \omega\in\Omega\}$

トスレバ、$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, 且 $\Omega_1\cap\Omega_2=\Theta$ デアル。故ニ、Ω_1 及ビ Ω_2 ハ何レモ bicompact Hausdorff space デアル。又、定理ヲ証明スルニハ、Ω' ガ Ω_1 ノ連続像デアルコトヲ示セバ充分デアル。

(2') $x'(\omega')$ ヲ Ω' ノ上デ実数値ノミヲトル $C(\Omega')$ ノ元トスルナラバ、対應スル $x(\omega)\in R$ モ、Ω_1 ノ上デ実数値ノミヲトル;

今、或ル $p\in\Omega_1$ ニ於テ、$x(p)=\lambda+i\mu$, $\mu\neq 0$ デアッタト

スル。シカラバ、$y'\equiv(x'-\lambda e')^2+(\mu e')^2$ ニ対應スル $y\equiv(x-\lambda e)^2+(\mu e)^2$ ハ、$y(p)=0$。一方、Ω' ノ上デ，$y'(w')\geq\mu^2>0$ デアルカラ $C(\Omega')$ ニハ，y' ノ逆元 z' ガ存在スル：$y'z=e$。故ニ、z' ニ對應スル z ニ関シテ、$y\cdot z=e$，即チ Ω_1 ノ上デ、$y(\omega)\cdot z(\omega)\equiv 1$ デナケレバナラナイ。コレハ $y(p)=0$ ニ反スル。故ニ，$x(\omega)$ ハ Ω_1 ノ上デ実数値デナケレバナラナイ。

(3°) Ω' ノ上ガ $y'(\omega')\equiv\overline{x'(\omega')}$ ナラバ，Ω_1 ノ上デ、$y(\omega)\equiv\overline{x(a)}$。

何トナレバ，$x'(\omega')+y'(\omega')$ $\frac{1}{i}[x'(\omega')-y'(\omega')]$ ハ Ω' ノ上デ共ニ実数値ノミヲトル、故ニ，(2°) ニヨツテ，$x(\omega)+y(\omega)$，$\frac{1}{i}[x(\omega)-y(\omega)]$ モ Ω_1 ノ上デ，実数値ノミヲトル、故ニ $\overline{x(\omega)}\equiv y(\omega)$

(4) 即チ R ハ $C(\Omega)$ ノ，條件 (*) ヲ滿ス *closed subring* デアル，故ニ定理 1 ニヨツテ，R ハ Ω_1 或ハ連続像 Ω'' ニ関スル $C(\Omega'')$ ト *equivalent* デアル，從ツテ、$C(\Omega')$ ト $C(\Omega'')$ トハ同型デアル、ヨク知ラレタ定理ニヨツテ Ω' ト Ω'' トハ *homeomorphic*，即チ Ω' ハ Ω_1 ノ連続像デアル。

〔證 終〕

$\boxed{\text{定理}}$ 3. Ω ヲ *bicompact Hausdorff space*，F ヲソノ閉集合トスル時，F ノ上ノ複素数値連続函数ノ全体ヲ Ω ノ上ヘ同時ニ、*linear*，*multiplicative* 且 *isometric* ニ拡張出来ルタメニ必要且充分ナル條件ハ，F ガ (*Borsuk*

ノ意味デノΩノ *retract* ナルコトデアル。

<u>証明</u>　充分ナルコトハ殆ンド明ラカデアルカラ、必要ナルコトノミヲ證明スル。

$C(F)$ヲ$C(\Omega)$ノ中へ同時ニ（定理ニ云フ如ク）拡張出来タトシテ、拡張サレタ$C(\Omega)$ノ元ノ全体ヲRトスル、シカラバRハ$C(F)$ト *equivalent* ナル　$C(\Omega)$ノ *closed subring* デアル。

故ニ定理２ニ於テ証明シタコトヨリ、RハΩノ或連続像$f(\Omega)\equiv\Omega'$ニ関スル$C(\Omega')$ト *equivalent* デアル。コノ場合定理１ノ証明ヨリ容易ニワカル如ク、FハΩ'ノ中ニ *homeomorphic* ニ *embed* サレテキル：$F\approx F'\leq\Omega'$.（Fノ各点ニハRノ *maximal ideal* ガ一ツ且唯一ツ対應スルコトヨリ明ラカデアル。）故ニ$F'=\Omega'$ヲ云ヘバ，証明ガ完結スルワケデアル。

今、$x'\neq y'$，$x', y'\in C(\Omega')$トスレバ，対應スル$x, y\in R$ハ、Rガ$C(F)$ノ拡張デアルコトカラ、Fノ上デ、$x(w)\neq y(w)$デアル。故ニ、F'ノ上デ$x'(w')\neq y(w')$デナケレバナラナイ。(何トナレバ，$w'=f(w)$ナラバ，$x'(w')=x(w)$デアル。)故ニF'ハΩ'ノ真部分集合デハアリ得ナイ。即チ$\Omega'=F'$デナケレバナラナイ。　　　　（証終）
